LOGIK UND MENGENLEHRE

ÜBUNGSBLATT 6

1. Man finde alle Ordnungrelationen die auf der Menge $A = \{a, b, c\}$ definiren lassen. Wieviele davon sind nicht isomorph?

2. Man finde, ein Beispiel von einer geordnete Menge $(A, \leq)$, so dass in A existiert ein einziges minimal Element das nicht das kleinste Element ist.

3. Man zeige dass die Divisibilität eine Präordnung auf $\mathbb{Z}$ ist, aber keine Ordnung und keine Äquivalenz. Man bestimme die von dieser Präordnung induzierter Äquivalenzrelation, und eine Bijektion zwischen die Faktormenge und die Menge $\mathbb{N}$.

4. Man zeige, dass eine geordnete Menge $(A, \leq)$ genau dann wohl geordnet ist wenn die Ordnung $\leq$ total ist und $(A, \leq)$ die Minimalitätsbedingung erfüllt.

5. Finden Sie den Fehler im Beweis des folgenden Scherzes:
Ist in einer Menge von n Studenten wenigstens einer, der die Prüfung schaffen wird, werden sie alle schaffen.
"Beweis" durch vollständige Induktion nach n.

(1) Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich.
(2) Wir nehmen an, dass die Aussage für $n = k - 1$ richtig ist. Sei

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$$

eine Menge von k Studenten, und sei s_1 einer, der die Prüfung schaffen wird. Wir betrachten zwei Teilmengen

$$S' = \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\} \text{ und } S'' = \{s_1, s_3, \dots, s_k\}.$$

Dann sind S' und S'' zwei Mengen von $k - 1$ Studenten mit wenigstens einem der die Prüfung schaffen wird. Nach der Induktionsvoraussetzung werden alle Studenten in S' und S'' die Prüfung schaffen. Aber $S' \cup S'' = S$, also werden alle Studenten in S die Prüfung schaffen.

(Leider gilt der "Beweis" auch für die Aussage, wenn einer der Stunenten die Prüfung nicht schaffen wird. Deswegen sollte man seine Freunde vorsichtig aussuchen!)

6. Man betrachte die geordnete Mengen $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ und $(C, \leq)$ und die Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Man zeige

a) Wenn f und g wachsend sind dann so ist $g \circ f$.

b) Wenn f und g fallend sind dann $g \circ f$ wachsend ist.
a) Wenn eine von f und g wachsend ist und die andere fallend dann $g \circ f$ fallend ist.

7. Man finde, ein Beispiel von einer bijektiven wachsenden Abbildung zwischen zwei geordnete Mengen, die kein Ordnungsisomorphismus ist.

8. Man zeige dass zwei endliche total geordnete Mengen genau dann isomorph sind wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen haben.

9. Sei A eine belibige Menge und sei $\mathcal{O}(A)$ die Menge aller Ordnungsrelationen die auf A definieren lassen. Dann ist $\mathcal{O}(A)$ mit der Eingeschlossenheit geordnet, und die maximale Elemente in $\mathcal{O}(A)$ sind genau die totale Ordnungen auf A.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`